



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, București, 8 februarie 2025

CLASA a VII-a

SUBIECTE

Problema 1 Se consideră suma

$$S = \frac{1}{(1+2^{-1})(1+2^2)} + \frac{1}{(1+2^{-2})(1+2^3)} + \cdots + \frac{1}{(1+2^{-2024})(1+2^{2025})}.$$

Arătați că $[2025 \cdot S] < 675$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

Gazeta Matematică

Problema 2 Pentru orice două numere reale a și b , distincte și strict pozitive, definim mulțimea $M(a; b) = \left\{ \frac{2ab}{a+b}; \sqrt{ab}; \frac{a+b}{2} \right\}$.

- a) Determinați $M(\sqrt{2026} - 45; \sqrt{2026} + 45)$;
- b) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M(45 - \sqrt{n}; 45 + \sqrt{n}) \subset \mathbb{N}$;

Problema 3 Fie paralelogramul $ABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$ și punctul $M \in (AB)$. Pe semidreapta (MO) considerăm punctul N astfel încât $NO = 3MO$. Demonstrați că:

- a) Paralela prin punctul B la dreapta DM trece prin mijlocul segmentului DN ;
- b) Punctele B, C, N sunt coliniare dacă și numai dacă $BM = 2AM$.

Problema 4 În rombul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, considerăm punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, astfel încât $BM = DN$. Dacă $AN \cap BD = \{P\}$ și $BQ \perp AM$, $PR \perp AD$, $Q \in (AM)$, $R \in (AD)$, demonstrați că:

- a) Punctele Q, O, R sunt coliniare;
- b) Dreptele BQ, AC și PR sunt concurente.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.